LA PARABOLA AUREA
di Gaetano Barbella

L'alba dell'intelligenza matematica

Nelle raffigurazioni dell'antico Egitto, come questa accanto, tratta dall'affresco della cappella funeraria di Thutmose III (XV secolo a.C.), l'umano è quasi una realtà astratta tale da dubitarne, se non fosse per i colori morbidi e densi di calore. I geroglifici hanno questo potere, simili a immaginari strumenti nelle mani di ipotetici geni.

Come quest'essere in atto offerente verso il faraone Thutmose III, che qui non si vede. La vita, in questo contesto, può intravedersi in quei due rivoli sgorganti dall'anfora nella destra del nobile dignitario. La ravvisata vita dà l'idea che provenga dal suo strano indumento, visibilmente intonato ad una geometria monumentale nota in Egitto, la piramide: quella di Cheope in particolare. A questo punto non ci vuole molto per immaginare una scienza in azione in tutto ciò, a cominciare dai rivoli parabolici e per completare il perfezionamento con la sezione aurea cui è congegnata la piramide. Ma come capire l'arcano della genialità che vi si sprigiona se non attraverso il segno del cuore che è nella destra del servitore fedele? Qui occorre possedere immaginazione per supporre un altro sgorgare, ma dall'ignoto. Ecco dove inizia la nobile funzione del dignitario dei due rivoli energetici, della matematica, in questo caso, e dove risiede il

potenziale della funzione regale del genio del suo inaccessibile mondo delle cause: proprio nel cuore degli uomini, appunto.
Che dite? Se il segno della piramide della sezione aurea è la fonte e meccanica intermediatrice dell'armonia di tutte le energie, le due parabole da cui esse sembrano transitare per riversarsi nei due slanciati contenitori, non possono che ritenersi auree anch'esse. Ma sappiamo della sezione aurea, del rettangolo aureo, della spirale aurea, di un angolo aureo, ma non di una parabola aurea. Ed è appunto l'intravisione di questa aura parabola il tema del presente scritto, ma sorge subito nel lettore questa domanda a ragione del titolo "La parabola aurea": perché i due rivoli energetici nell'immagine egizia e non uno, se la mia introspezione allegorica è sostenibile? La risposta verrà alla fine nel far capire la doppia natura della sezione aurea, il segno della sua regalità.

Una e-mail inaspettata
Una inaspettata e-mail, giunta da un giovane studioso della sezione aurea di Padova, ha riaperto in me una parentesi nuova su questa concezione antica quanto il mondo. Me ne sono occupato tanto che credevo di ritenere appagato il mio interesse su di essa, invece no. In seguito, dopo aver letto lo scritto pervenutomi ho capito che la visione che avevo della sezione aurea era incompleta: occorreva capire che la sua auricità, quale attributo regale, non poteva sussistere senza una meravigliosa corte di peculiari numeri intorno a sé per farle da auro manto. Il messaggio diceva proprio questo, con merito che riconosco nel suo latore preso dall'entusiasmo di costatare a modo suo "il primato della sezione aurea" che così titolava il suo studio matematico. Niente di meglio, allora, che intraprendere un ulteriore attrattivo viaggio nel mondo di questa illustre concezione matematica e cominciare a riparlarne, iniziando naturalmente dai noti ragionamenti matematici sulla sezione aurea e così procedere poi a trattare le cose nuove che il dottor Andrea Salmaso, il latore della suddetta e-mail, mi ha gentilmente recapitato e che doverosamente allego qui sotto.

La Corte dei numeri interi della Sezione Aurea
La geometria della sezione aurea parla del segmento aureo, parla del rettangolo aureo e poi della spirale aurea che vi deriva. Ma parla ancora dell'angolo aureo (come quello che è servito per far delineare la piramide di Cheope, per esempio). Tutto questo è meraviglioso e non si

fatto che redigere libri che ne hanno diffuso i dettami, ma c'è da chiedersi: è tutto qui il suo top? Se è stata capace di ispirare, prima d'altro la natura per plasmare il creato e il creatore dell'uomo stesso, e poi gli artisti e architetti per strutturare in anteprima le loro opere, tanto più la scienza matematica che grazie ad essa ogni cosa esistente vi è meravigliosamente intonata. Dunque la geometria della sezione aurea deve andare ben oltre le suddette geometrie, e perché non rivelarsi attraverso qualche peculiare curva a mo' di emiciclo regale, oltre alla spirale aurea suddetta?
Con il mio saggio L'angolo aureo si è visto che la sezione aurea è presente in tutte le curve geometriche a partire dalle note coniche, ellisse, parabola e iperbole. Ma della concezione della sezione aurea, incuriosisce non poco la peculiarità matematica che vi riguarda e che si concentra sul suo valore $(1+\sqrt{5})/2$, a tutti noto. Infatti è su questo che il dottor Andrea Salmaso ha concentrato tutta la sua attenzione per dar luogo a interessanti singolarità, come dirò fra poco. Sappiamo già che il 5 sotto radice di questa formula deve essere speciale, tant'è che dalla sezione aurea deriva la costruzione del pentagramma. E gli altri numeri interi oltre al 5 che fanno? viene da chiedersi incuriositi. Vi sono estranei o vi concorrono? Intanto si può sapere facilmente che, attraverso la stessa formula del 5 sostituito con altri numeri interi, non sembrano riscontrarsi relazioni con quello della sezione aurea. Tuttavia col pervenirmi del messaggio di Salmaso, si rischiara l'orizzonte sul nesso dei numeri suddetti col 5 della sezione aurea. Ma facciamo un passo alla volta per giungere poi a questa scoperta di Salmaso, che è poi una cosa sotto gli occhi di tutti, ma a cui non si è data mai rilevanza. Intanto non guasta ripescare le arcinote nozioni di base della sezione aurea, poi tutto sarà più facile per procedere oltre.
In matematica, la sezione aurea o media ragione di un segmento AB, è quella parte AX che è media proporzionale tra l'intero segmento e la rimanente parte XB. In particolare si può definire questa concezione con la seguente espressione di calcolo: AB:AX=AX:XB
Ora, omettendo il dettaglio matematico del calcolo della sezione aurea e della relativa esecuzione grafica, il valore che se ne ricava si sintetizza nella semplice equazione $AX=(1+\sqrt{5})/2$, di cui AX, tradotto in cifre, è 1,618... Ma si deve ritenere aureo anche il suo inverso, ovvero $2/(1+\sqrt{5})$, perché non cambiano le cifre decimali ma solo l'1 iniziale che diventa 0.
Finalmente si ha modo di riprendere il ragionamento sul nesso dei

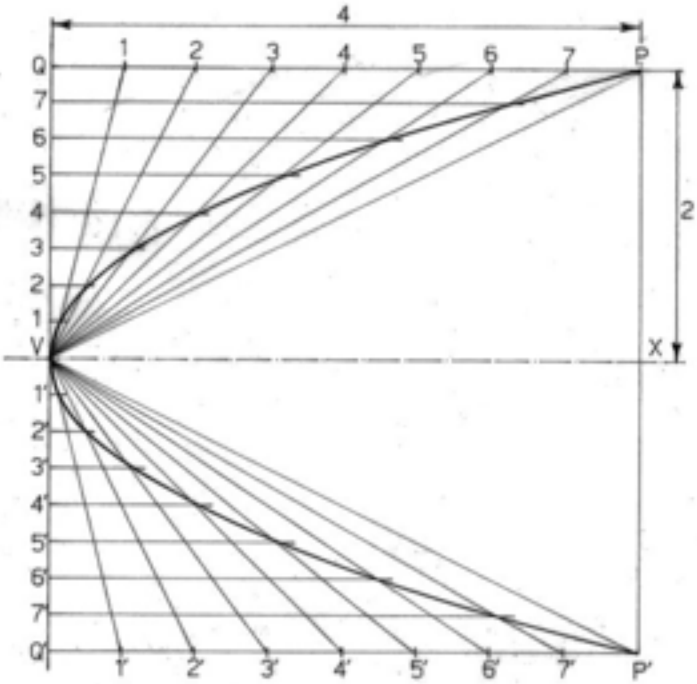
numeri interi sostituibili al 5 sotto radice della AX=(1+√5)/2 e inversa della sezione aurea. Giusto in relazione della suddetta missiva in merito di Andrea Salmaso.
Ma cosa dice di così interessante Salmaso in merito a questi numeri interi sotto radice in relazione al 5 della formula suddetta, normale e inversa? Per ciò che interessa il tema del nesso in causa, si può sintetizzare in questo modo la cosa: egli parte da AX=(1+√5)/2 che sappiamo e che per semplicità indicheremo (1+√5)/2=x, di qua poi Salmaso rileva che x^2–x=1
Fin qui nulla che non si sapesse, ma non si sapeva esplicitamente che sostituendo al 5 sotto radice altri numeri interi si presentava –secondo Salmaso– un quadro assai interessante e vedremo poi perché.
Ecco riepilogata una serie di casi limitata ai numeri sotto radice da 2 a 9.

1. **[(1+√2)/2]^2 –(1+√2)/2=1/4;**
2. **[(1+√3)/2]^2 –(1+√3)/2=1/2;**
3. **[(1+√4)/2]^2 –(1+√4)/2=3/4;**
4. **[(1+√5)/2]^2 –(1+√5)/2=1;**
5. **[(1+√6)/2]^2 –(1+√6)/2=1+1/4;**
6. **[(1+√7)/2]^2 –(1+√7)/2=1+1/2;**
7. **[(1+√8)/2]^2 –(1+√8)/2=1+3/4;**
8. **[(1+√9)/2]^2 –(1+√9)/2=2.**

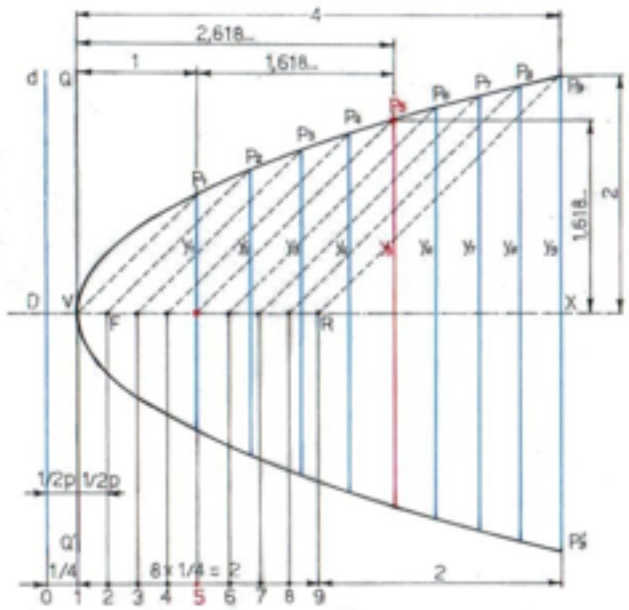
Pitagora sembrava essere stato sconfitto dal fatto che l'ipotenusa del quadrato di lato 1 dava per risultato √2, ossia un numero irrazionale, ma poi si scopre che il numero intero lo si ritrova col 2 generando un successivo quadrato di lato √2 attraverso la sua diagonale. Con meraviglia però, ora c'è molto di più, i numeri irrazionali compreso quello della sezione aurea, si ricompongono in un singolare panteon di numeri interi, se pur sotto frazione alcuni. A buona ragione si può immaginare che questi numeri facciano da corte al numero 1 che riguarda la discussa sezione aurea.
Questo è in sintesi il "tesoro del campo" scoperto da Andrea Salmaso, ma come fare per servircene così come è stato per la geometria della sezione aurea, del rettangolo aureo e così via? Ovvero per i valori suddetti – mettiamo quelli da 2 a 9 – può trovarsi una geometria confacente tale da poterla realizzare con l'uso di riga e compasso? La risposta è sì decisamente e ora lo dimostro.

La Parabola Aurea

Si parte dalla suddetta equazione nota $x^2-x=1$ che, come si vedrà, ci conduce, sul piano della geometria analitica, all'equazione della parabola cosiddetta canonica (il suo vertice coincide con l'incrocio degli assi cartesiani).



In realtà l'equazione di questa parabola è $y^2=2px$, dove y e x sono l'ordinata e l'ascissa di un punto generico situato nel primo quadrante e p/2 la distanza focale dall'origine (p è il parametro) che è l'incrocio degli assi cartesiani. Ma se consideriamo $2p=1$ (quindi $p=1/2$), ecco che l'equazione diventa $y^2=x$, ovvero $y^2-x=0$, che equivale a $x^2-x=n$, essendo $x^2 \neq x$ e dove la differenza n assume tutti i valori da 1/4 a 2 contemplati ai § da 1 a 8 suddetti. A questo punto nulla di più facile che elaborare graficamente la parabola canonica che si confà a tutti i suddetti valori da 1/4 a 2, cosa che può ottenersi in questo modo, guardando la figura in basso: si tracciano gli assi VX e quello ortogonale QQ' che corrispondono agli assi cartesiani. Faremo in modo che sia il segmento VX = 4 e sia il segmento ortogonale QV=2. Poi, come si vede sopra in figura, divideremo in 8 parti uguali i segmenti QP e QV. Ugualmente faremo per le rispettive parti opposte. Di seguito si tracceranno le parallele all'asse VX partendo dalle divisioni sui due segmenti verticali QV e VQ', fino a incontrare le linee tracciate in precedenza. Tutto questo va fatto in modo che la linea dell'1 orizzontale vada a intersecare la linea dell'1 convergente al vertice V. Così anche per la parte opposta. Per tutti le altre linee vale questa regola. In seguito si uniscono con un curvilineo tutti i punti di intersezione ottenuti e così si è disegnata la parabola pronta per procedere oltre come vedremo. Una volta ottenuta la parabola come quella della figura accanto, cominciamo a individuare i relativi elementi contemplati dalla geometria analitica. Il punto V è l'origine di questa parabola che per essere canonica, come già detto, deve avere il punto focale F in modo che sia il segmento VF=1/4, e così è infatti. Poi si ha la direttrice d che passa da D con DV=1/4. Però questi due elementi non intervengono ai fini dell'elaborazione grafica in atto, semmai serviranno poi per il calcolo analitico a supporto della grafica a fine esecuzione per chi lo vorrà fare.

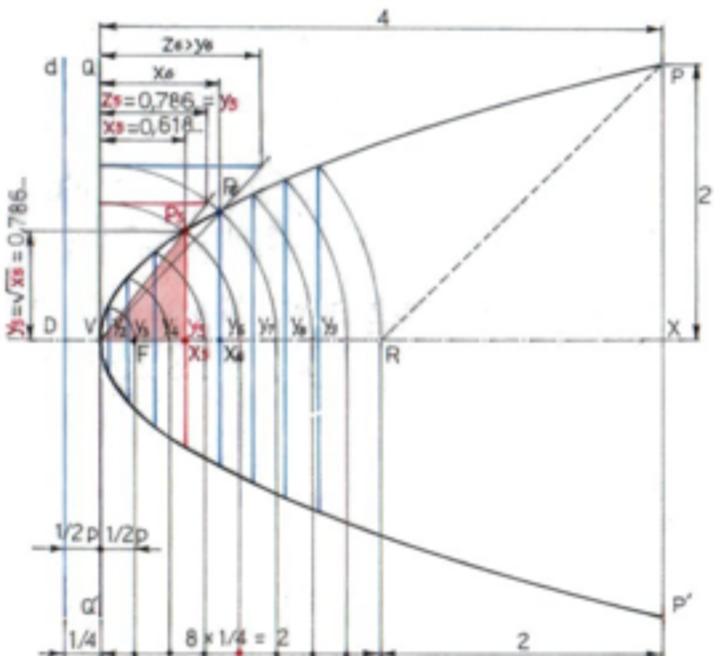


Ora occupiamoci della parte che più ci preme definire. Per primo i punti estremi della parabola, P 9 e P9' hanno per coordinate cartesiane X9=4 e Y9=2 e riguardano l'ascissa e ordinata del valore corrispondente al §8 sopra riportato in relazione all'equazione con √9, ovvero [(1+√9)/2]^2 – (1+√9)/2=2
Ora resta da dividere in due parti l'asse VX e la parte VR=2 suddividerla in altre 8 parti uguali, pari ognuna a 1/4. Si unisce poi R con P9 e P9' e si procede allo stesso modo, con delle parallele a RP9 e RP9', intersecando la parabola del quadrante superiore in P8, P7 fino a P1 congiunto col vertice V. Analogamente per la parabola del quadrante inferiore. A conclusione avremo ottenuto le ascisse e ordinate di tutti i valori contemplati attraverso i § oltre l'8 suddetto, ossia da 7 a 1.
In particolare vedremo collocato il punto P5 (in rosso) che individua nel quadrante superiore l'ascissa e l'ordinata (in rosso) relative alla sezione aurea, che sono rispettivamente [(1+√5)/2]^2 e (1+√5)/2, ovvero la sezione aurea elevata al quadrato e la pura sezione aurea.
La dimostrazione che il metodo grafico rispecchia le attese sulla individuazione di tutti i valori contemplati nei 9 paragrafi suddetti è quanto mai semplice. Partendo dal caso del §8 già esaminato, si ha il triangolo rettangolo RXP9 che ha i cateti eguali fra loro e precisamente uguali a 2 che corrisponde all'ordinata Y9 di valore (1+√9)/2. Se si sottrae questo valore all'ascissa VX di dimensione 4, ossia il valore di

$[(1+\sqrt{9})/2]^2$, dà come residuo 2 che è quanto ci si doveva aspettare. In modo analogo ci si dispone per tutti gli altri valori riguardanti le ordinate da Y8 a Y1 perché anche qui si hanno tanti triangoli rettangoli con cateti eguali fra loro. A questo punto è superfluo proseguire per dimostrare che ogni ordinata sottratta alla rispettiva ascissa dà come residuo i valori indicati ai paragrafi da 7 a 1.

La Divina Proporzione

Resta ora da trattare tutti i casi che riguardano gli inversi dei valori sin qui contemplati di cui ai § da 8 a 1. C'è da dire subito che se è stato possibile adottare il criterio di partire dalla sezione aurea $AX=(1+\sqrt{5})/2$, e che per semplicità ho indicato $(1+\sqrt{5})/2=x$,per poi rilevare che $x^2-x=n$non lo è per l'inverso di $(1+\sqrt{5})/2$, ossia $2/(1+\sqrt{5})$, che è < di 1. E lo sono tutti gli altri numeri contemplati nei § da 8 a 1 suddetti.
Si capisce che un tal numero elevato alla potenza del 2 non è più in rapporto di 2:1 con sé stesso, così come era prima che permetteva di individuarli sulla parabola canonica avente il parametro $p=1/2$.
Tuttavia l'esame sui numeri inversi in questione, fermo restando tutto l'apparato grafico della parabola servito per i corrispondenti numeri > di 1, compreso le suddivisioni sul relativo asse mediano delle ascisse VX, come farò vedere di seguito, costituirà la prova evidente che la sezione aurea è la regina di tutti gli altri valori con essa in esame.
Per ora esaminiamo il caso della sezione aurea che, col criterio che sto praticando, la vede come ascissa nel sistema cartesiano della parabola canonica in adozione che si vede al lato.



Per identificarlo graficamente utilizzo lo stesso punto 5 relativo all'asse VX (in rosso) che è servito in precedenza per il valore corrispondente > di 1. Perciò uso il compasso puntandolo i V e

traccio un arco di raggio V5 fino a intersecare la parabola in P5. Ho evidenziato in rosso il triangolo rettangolo a riguardo P5VX5, congiungendo V con P5 che misura di conseguenza 1.
Su questa base potremo fare un piccolo ragionamento algebrico evidenziando un sistema di due semplici equazioni considerando, nel caso della sezione aurea , i due cateti come incognite e l'ipotenusa nota che è uguale a 1. Sappiamo però che il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata relativa, rispettivamente x5 e y5 è conforme a quello della parabola in questione. Perciò ecco il sistema delle due equazioni a riguardo:

1.y^2=x
2. y^2=1–x^2

La seconda equazione si ricava applicando il teorema di Pitagora al triangolo P5VX5 suddetto.
Omettendo tutto il breve itinerario per estrapolare l'incognita x5, si evincerà che essa è uguale a 2/(1+√5). Sapendo ora il segmento x5si perviene al segmento corrispondente y5 che è √ [2/(1+√5)] ossia 0,786... Ma interessa sapere che questo valore numerico è lo stesso del segmento tangente all'arco che è servito a rintracciare sulla parabola il punto P5. In particolare quello che parte dall'ordinata VQ fino a intersecare il prolungamento VP5, indicato in figura con z5.
Questo fatto è singolare e non si può assolutamente verificare per tutti gli altri casi relativi alle rimanenti ordinate da Y2 a Y9, perché al variare in meno e/o più dell'angolo del vettore VP5con l'asse della parabola VX vi consegue un diverso rapporto fra le corrispondenti y5 e z5. Come il caso della figura in cui z6è > di y6. Ma questa cosa è argomentata in modo particolareggiata del menzionato mio saggio L'angolo aureo. Ecco perciò ancora dimostrato quanto sia unica e giustamente stimata da sempre la sezione aurea quale divina proporzione.

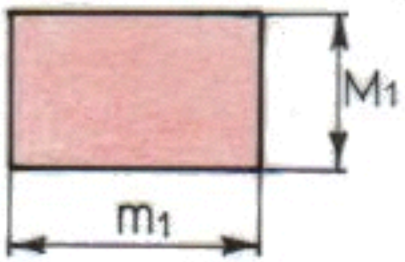
ALLEGATO: IL PRIMATO DELLA SEZIONE AUREA
a cura di Andrea Salmaso (andreasalmy@yahoo.it)

Presentazione
Salve, mi chiamo Andrea Salmaso e sono nato a Padova il 22 maggio 1980. Diplomato in ragioneria nel 1999, successivamente, ho lavorato come tipografo e contemporaneamente mi sono iscritto alla facoltà di

scienze politiche di Padova dove, nel 2006, ho dato la tesi di laurea. A partire dal 2002 ho iniziato ad interessarmi della sezione aurea e dei misteri ad essa connessi, perché un mio amico, in seguito ad un viaggio in Egitto, me ne parlò sommariamente, ma accese in me, fin da subito, una certa curiosità. Dopo aver compiuto, da autodidatta, importanti studi filosofici e matematici sulla proporzione aurea sono arrivato alle conclusioni che qui di seguito espongo.

Capitolo Primo - Cenni storici e derivazione geometrica

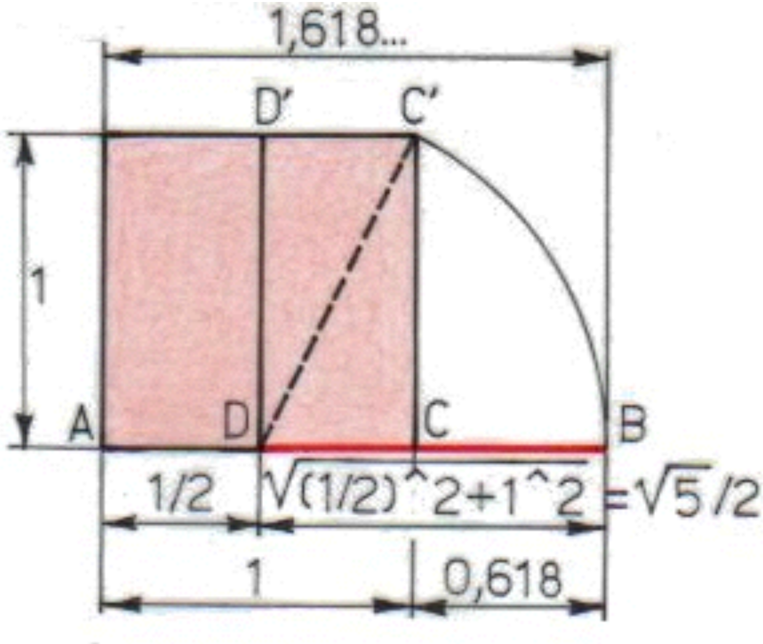
La sezione aurea è una proporzione matematica conosciuta fin dall'antichità il cui valore è individuato dal rapporto 1,618033989... : 1 . "Aureo" , però, è anche il reciproco 1: 1,618033989... = 0,618033989... che,



come si vede, risulta determinabile anche dalla sottrazione 1,618033989... - 1 = 0,618033989... dato che la proporzione e il suo reciproco presentano la stessa mantissa, ossia la parte decimale della proporzione e del suo reciproco sono eguali. Un rettangolo, come quello riportato a lato, è dimensionato secondo il rapporto aureo se il rapporto tra il suo lato più corto m1 e quello più lungo M1 misura m1/M1=1/1,618033989...=0,618033989 o viceversa, M1/m1=1,618033989.../1=1,618033989...

Storicamente si può ritenere che i primi ad applicare questa relazione nella costruzione di manufatti furono gli Egizi, infatti, chi si interessa da vicino di questa civiltà e dei monumenti che fu in grado di erigere (per esempio le piramidi) incontra, non di rado, questa proporzione tra le misurazioni effettuate. Anche i Greci davano molta rilevanza a questa proporzione, per esempio, il Partenone di Atene contiene la sezione aurea nel rapporto tra varie sue parti, e furono ancora i matematici greci che diedero alla proporzione il nome di PHI = ϕ corrispondente alla lettera del loro alfabeto.

Infine, nel Rinascimento, il rapporto aureo fu utilizzato da molti artisti nei loro dipinti: accadeva spesso che questi artisti facevano di tale proporzione l'ordito delle loro opere, per esempio disponevano l'orizzonte del loro quadro seguendo il rapporto 1,618033989... : 1 oppure 1 : 1,618033989... evitando così di dividere la tela in parti eguali. Nel periodo rinascimentale inoltre la sezione aurea venne conosciuta anche con la denominazione di “divina proporzione” in quanto, tra tutte le possibili proporzioni, quella aurea sembrava rappresentare il vero canone di bellezza voluto da Dio per dar vita al creato. In effetti il rapporto aureo 1,618033989... : 1 o, se si preferisce, il reciproco 1:1,618033989... sembra trasmettere un senso di equilibrio e armonia nelle forme cui si applica; molti esperimenti sono stati condotti per verificare la preferenza umana verso certe proporzioni e, in generale, la proporzione preferita è risultata essere proprio quella aurea.



Cerchiamo ora di determinare geometricamente i segmenti che individuano la proporzione di sezione aurea, facendo riferimento alla figura sotto. Sezione aurea di un segmento AB è quella parte AC che è media proporzionale tra l’intero segmento AB e la rimanente parte CB. Si ha, pertanto, che l’intero segmento AB sta alla parte maggiore AC come la parte maggiore AC sta alla parte minore CB, ossia ϕ = AB : AC = AC : CB dove il punto B è individuato, se AC = 1, dalla diagonale.

DC' = DB = √ [(1/2)^2+1^2] = (√5)/2 = 1,118033989...

Assumendo eguale a 1 la parte maggiore del segmento AB, cioè AC = 1, si hanno le seguenti relazioni:

AB : 1 = 1 : CB e AB = 1 + CB

A partire da queste relazioni si ha che 1^2 = (1 + CB) CB quindi CB^2 + CB - 1 = 0 che è una normale equazione di 2° grado nella forma x^2 + x - 1 = 0 la quale si risolve utilizzando la classica formula di risoluzione delle equazioni di 2° grado; pertanto si hanno due soluzioni:

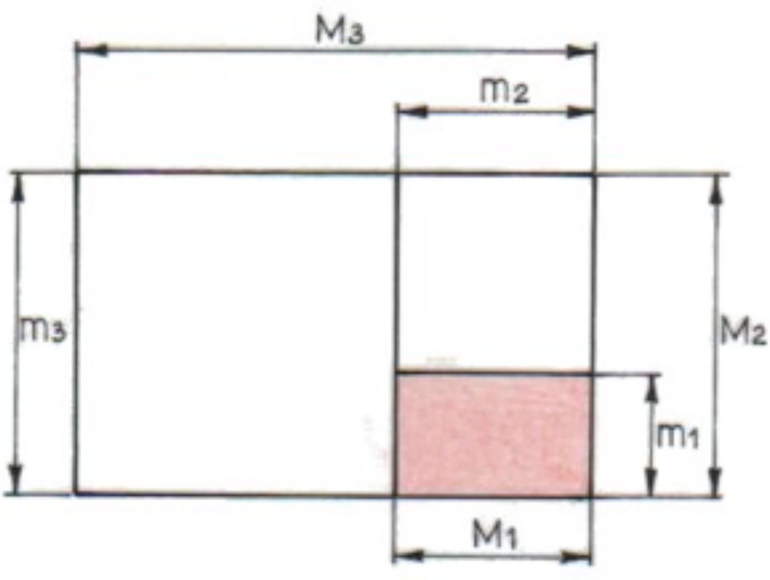
1° soluzione CB = [- 1 - √(1+4)] : 2;

2° soluzione CB = [- 1 + √(1+4)] : 2.

La prima è una soluzione negativa della quale non si tien conto perché non soddisfa le condizioni del problema; la seconda rappresenta proprio la relazione di sezione aurea e si può scrivere nella forma $(\sqrt{5} - 1) : 2 = 0{,}618033989...$; quindi, se come precedentemente riportato, AB = 1 + CB allora AB = 1 + 0,618033989... = 1,618033989... che è il risultato del reciproco $2 : (\sqrt{5} - 1)$.
Il rapporto di sezione aurea è dunque determinato sia dalla relazione $(\sqrt{5} - 1) : 2 = 0{,}618033989...$ sia dal suo reciproco
$2 : (\sqrt{5} - 1) = 1{,}618033989...$, tuttavia è possibile individuare il rapporto aureo anche nelle relazioni
$(\sqrt{5} + 1) : 2 = 1{,}618033989...$ ed il reciproco
$2 : (\sqrt{5} + 1) = 0{,}618033989...$
in questo caso si è semplicemente sostituito il segno - del binomio $(\sqrt{5} - 1)$ con il segno + senza comunque alterare la sostanza del rapporto, infatti, dato che
$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 4$, si ha che
$4 : (\sqrt{5} - 1) = 2 : [(\sqrt{5} - 1) : 2] = 2 : 0{,}618033989... = \sqrt{5} + 1$, sicché il segmento $\sqrt{5} + 1$ è anch'esso parte aurea del segmento 2. A partire quindi da queste relazioni è ora possibile scrivere la proporzione aurea in forma corretta, ossia,
$\phi = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1) = 1{,}618033989...$ oppure, se si preferisce,
$\phi\text{-}1 = 2 : (\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} - 1) : 2 = 0{,}618033989...$

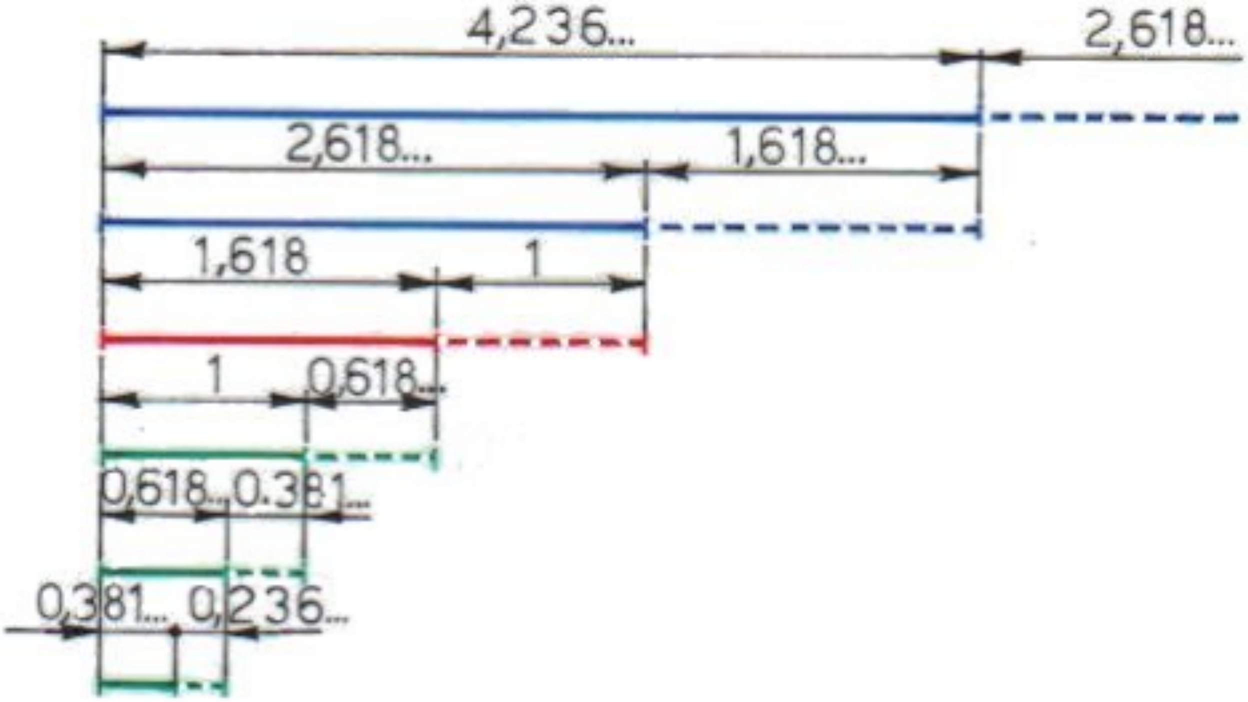
Capitolo Secondo - Le fondamentali caratteristiche della proporzione aurea

Riprendiamo ora il rettangolo di lati $m1= 1$ ed $M1= 1{,}618033989...$ in cui il rapporto tra i lati è quello di ϕ e costruiamo sul lato più lungo M1 di questo rettangolo un quadrato. Ora il quadrato, assieme al rettangolo, formerà un nuovo rettangolo più grande di lati
$m2= 1{,}618033989...$ ed



$M2= 1 + 1,618033989... = 2,618033989...$
dove il rapporto tra i lati è ancora quello di ϕ, infatti,
$M2/m2= 2,618033989... / 1,618033989... = 1,618033989...$, oppure
$m2/M2= 1,618033989... / 2,618033989... = 0,618033989... = \phi -1$.
Se ancora, ripetendo il procedimento, si costruisce sul lato più lungo M2 del rettangolo appena ottenuto un quadrato, si ottiene un nuovo rettangolo ancora più grande, i cui lati misurano
$m3=1 +1,618033989... = 2,618033989...$ e
$M3=2,618033989... + 1,618033989... = 4,236067978...$
e il loro rapporto è ancora quello di ϕ perché
$M3/m3= 4,236067978... / 2,618033989... = 1,618033989...$, oppure
$m3/M3= 2,618033989... / 4,236067978... = 0,618033989... = \phi-1$
come mostra la figura sopra riportata. Ripetendo questo procedimento all'infinito, ossia continuando a costruire sempre sul lato più lungo M di ogni rettangolo un quadrato, risulterà che tutti i rapporti tra i lati M ed m oppure m ed M di ogni nuovo rettangolo sono eguali rispettivamente a ϕ o a ϕ-1. Quindi, è come se la proporzione aurea si rigenerasse in ogni nuovo rettangolo; questa è una proprietà che, tra tutte le possibili proporzioni, solo quella di sezione aurea possiede.
Fondamentale, però, è osservare che anche ogni lato M oppure m di uno qualsiasi di questi rettangoli intrattiene, con i lati M o m di un qualsivoglia altro di questi rettangoli, un rapporto basato su potenze di $\phi = 1,618033989...$
Potenze di ϕ sono, per esempio:
$\phi^1 = 1,618033989...$ o
$\phi^{-1} = 0,618033989...$; pertanto
$\phi^2 = 1,618033989...^2 = 2,618033989...$ o
$\phi^{-2} = 0,618033989...^2 = 0,381966011...$;
$\phi^3 = 1,618033989...^3 = 4,236067978...$ o
$\phi^{-3} = 0,618033989...^3 = 0,236067978...$; etc.
Facciamo degli esempi:
1° - il lato corto del primo rettangolo misura $m1= 1$ mentre il lato lungo del terzo rettangolo misura $M3= 4,236067978...$,
il rapporto $M3/m1= 4,236067978... / 1$ è eguale a ϕ^3, ossia $1,618033989...^3$ ed il reciproco $m1/M3= 1 / 4,236067978...$ sarà eguale a ϕ^{-3}, ossia $0,618033989...^3$;
2° - il lato lungo del primo rettangolo misura $M1= 1,618033989...$, mentre quello lungo del terzo rettangolo misura sempre $M3= 4,236067978...$,

il rapporto M3/M1= 4,236067978... / 1,618033989... è eguale a ϕ^2 ossia 1,618033989...^2 ed il reciproco M1/M3= 1,618033989... / 4,236067978... è invece eguale a ϕ^-2 ossia 0,618033989...^2 , e così via.
Si può quindi ritenere che il rapporto di ϕ, oltre a rigenerarsi all'infinito come rapporto tra il lato lungo M ed il lato corto m di uno stesso rettangolo, permane anche sotto forma di potenze di ϕ nel rapporto tra un qualsiasi lato M o m di un rettangolo e un qualsiasi lato M o m di un altro rettangolo.
A questo punto è possibile enunciare la fondamentale caratteristica che solo la proporzione aurea possiede:



Se fra due grandezze sussiste il rapporto ϕ : 1 o il reciproco 1 : ϕ , la minore sta alla maggiore come la maggiore sta alla somma di entrambe; oppure, se si preferisce, il rapporto di ϕ ha la proprietà di suddividere un intero in modo che esso stia alla parte maggiore come la parte maggiore sta alla minore, infatti, dato che la parte maggiore è sezione aurea dell'intero, anche la loro differenza è sezione aurea della parte maggiore, e così di seguito all'infinito. Questo accade perché, in generale, ϕ n+ ϕn+1= ϕ n+2

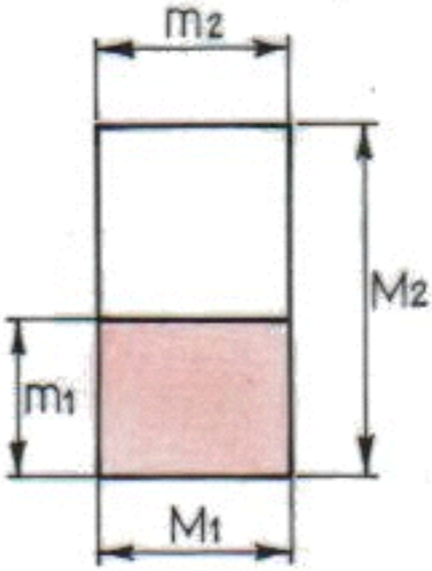
e, viceversa, ϕ - $\phi n+1= \phi n$
Lo schema riportato sopra, dà l'idea della fondamentale caratteristica della proporzione aurea. Leggendo lo schema dal basso verso l'alto abbiamo che:
$(\phi^{-3} = 0{,}236...) + (\phi^{-2} = 0{,}381...) = \phi^{-1} = 0{,}618...;$
$(\phi^{-2} = 0{,}381...) + (\phi^{-1} = 0{,}618...) = 1;$
$(\phi{-1} = 0{,}618...) + 1 = \phi = 1{,}618...;$
$1 + (\phi = 1{,}618...) = \phi^2 = 2{,}618...;$
$(\phi = 1{,}618...) + (\phi^2 = 2{,}618...) = 4{,}236...;$ etc.
quindi la generale $\phi n + \phi n+1= \phi n+2$
Leggendo invece la figura dall'alto verso il basso abbiamo che:
$(\phi^3 = 4{,}236...) - (\phi^2 = 2{,}618...) = \phi = 1{,}618...;$
$(\phi^2 = 2{,}618...) - (\phi = 1{,}618...) = 1;$
$(\phi = 1{,}618...) - 1 = \phi^{-1} = 0{,}618...;$
$1 - (\phi^{-1} = 0{,}618...) = \phi^{-2} = 0{,}381...;$
$(\phi^{-1} = 0{,}618...) - (\phi^{-2} = 0{,}381...) = \phi^{-3} = 0{,}236...;$ etc.
quindi la generale $\phi n+2 - \phi n+1= \phi n$
Ora possiamo scrivere la
$\phi = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1)$
come sequenza di rapporti tra potenze di ϕ, ossia:
$... = (1{,}618033989..^3 \ / \ 1{,}618033989...^2) = (1{,}618033989...^2 \ / \ 1{,}618033989...) = (1{,}618033989... \ / \ 1) = (1 \ / \ 1{,}618033989...^{-1}) = (1{,}618033989...^{-1} \ / \ 1{,}618033989...^{-2}) = (1{,}618033989...^{-2} \ / \ 1{,}618033989...^{-3}) = ... = 1{,}618033989... \ / \ 1$
e la
$\phi^{-1} = 2 : (\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} - 1) : 2$
anch'essa come sequenza di rapporti tra potenze di ϕ^{-1}:
$... = (0{,}618033989...^3 \ / \ 0{,}618033989...^2) = (0{,}618033989...^2 / \ 0{,}618033989...) = (0{,}618033989... \ / \ 1) = (1 \ / \ 0{,}618033989...^{-1}) = (0{,}618033989...^{-1} \ / \ 0{,}618033989...^{-2}) = (0{,}618033989...^{-2} \ / \ 0{,}618033989...^{-3}) = ... = 0{,}618033989... \ / \ 1$
A loro volta le potenze di ϕ sono coordinabili nella generale $(\sqrt{5} + 1)n : 2n$ e le potenze di ϕ^{-1} nella generale $(\sqrt{5} - 1)n : 2n$.

Capitolo Terzo - Le caratteristiche aritmetiche del quadrato di Sezione Aurea

Finora abbiamo visto che la proporzione aurea può essere espressa indifferentemente sia dalla

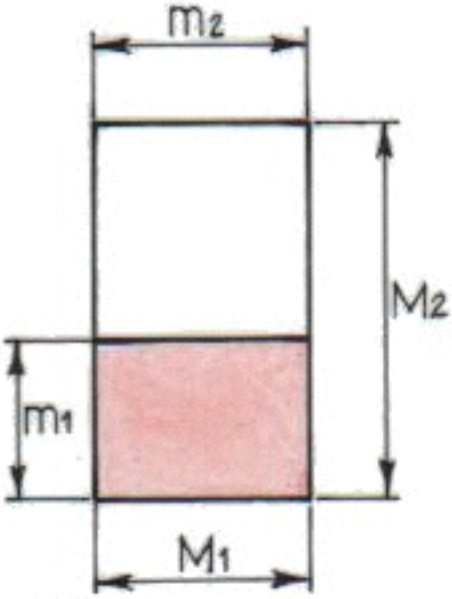
$\phi - 1 = 2 : (\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} - 1) : 2$, sia dalla
$\phi = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1)$
Ora però concentriamoci solo sulla seconda di queste proporzioni, cioè quella il cui risultato è 1,618033989.. , perché il suo quadrato presenta una caratteristica a dir poco singolare.
Come peraltro si sarà già potuto notare, il quadrato della proporzione 1,618033989... mantiene la stessa mantissa della proporzione, cioè, la parte decimale di ϕ^2=2,618033989... è eguale alla parte decimale di ϕ = 1,618033989... e la loro differenza è eguale a 1, infatti,
(ϕ^2 = 2,618033989...) - (ϕ = 1,618033989...) = 1.
Precisamente abbiamo che il quadrato di un numero irrazionale ha la parte decimale perfettamente eguale a quella del suo segmento, per cui la loro differenza risulta un numero finito. Di fronte a questa singolare caratteristica aritmetica viene da chiedersi se esiste qualche altro numero irrazionale il cui quadrato abbia una tale proprietà. Ma come verificare questa possibilità? Proviamo quindi semplicemente a sostituire la $\sqrt{5}$, presente nella proporzione
$\phi = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1)$,
con altre radici di numeri interi e, in tal modo, a costruire altre proporzioni. Sostituendo, per esempio, alla $\sqrt{5}$ la $\sqrt{2}$ abbiamo che:
$(\sqrt{2} + 1) : 2 = 0,5 : (\sqrt{2} - 1)$ = 1,207106781...
1,207106781...^2 = 1,457106781...
come si vede il quadrato di questa proporzione presenta, a partire dalla terza cifra decimale, la stessa mantissa della proporzione e la loro differenza è, pertanto, un numero finito, infatti:
1,457106781... - 1,207106781... = 0,25
Abbiamo dunque trovato una proporzione il cui quadrato presenta una caratteristica aritmetica simile al quadrato della proporzione di sezione aurea, allora, utilizzando lo stesso procedimento geometrico applicato per la proporzione aurea, costruiamo un rettangolo di lati
$m1 = 1$ ed $M1$ = 1,207106781... e,
successivamente, costruiamo sul lato lungo M1 di tale rettangolo un quadrato per vedere se, nel nuovo rettangolo così ottenuto, permane tra i suoi lati M2 ed m2 la stessa proporzione di partenza, come accadeva in precedenza col rapporto ϕ = 1,618033989.. : 1 (vedi capitolo 2).

$m1 = 1$
$M1 = 1{,}207106781...$
$m2 = 1{,}207106781...$
$M2 = 1 + 1{,}207106781.. = 2{,}207106781...$
1° rapporto $M1/m1 = 1{,}207106781... / 1 = 1{,}207106781...$
2° rapporto $M2/m2 = 2{,}207106781... / 1{,}207106781... = 1{,}828427125...$



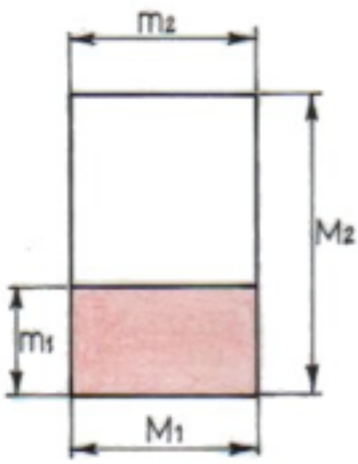
Come si vede il rapporto tra i lati M1 ed m1 del primo rettangolo è diverso dal rapporto tra i lati M2 ed m2 del secondo rettangolo, ossia $1{,}207106781... \neq 1{,}828427125...$, per cui, anche se aritmeticamente il quadrato della proporzione
$(\sqrt{2} + 1) : 2 = 0{,}5 : (\sqrt{2} - 1) = 1{,}207106781...$
presenta caratteristiche simili al quadrato di ϕ (cioè nel quadrato di 1,207106781... permane, a partire dalla terza cifra decimale, la stessa mantissa della proporzione), tuttavia, nella costruzione geometrica dei rettangoli il rapporto tra i lati M1/m1 ed M2/m2 non rimane lo stesso, a differenza di quanto accadeva nella costruzione geometrica dei rettangoli dimensionati secondo sezione aurea.
Qui di seguito riporto altri due esempi nei quali si sostituisce alla $\sqrt{5}$ (radice caratterizzante appunto la proporzione di sezione aurea) la $\sqrt{3}$ e la $\sqrt{6}$; dopo aver costruito le rispettive proporzioni si accerterà che il quadrato di queste proporzioni mantenga, tutta o in parte, la stessa mantissa della propria proporzione e, successivamente, si procederà alla costruzione geometrica dei rettangoli per verificare se, nel rapporto tra i lati M1/m1 ed M2/m2 dei rettangoli, la proporzione di partenza permanga come accadeva con la proporzione aurea.
1° ESEMPIO: sostituzione della $\sqrt{5}$ con la $\sqrt{3}$
La proporzione che risulta è $(\sqrt{3} + 1) : 2 = 1 : (\sqrt{3} - 1) = 1{,}366025404...$
$1{,}366025404...^2 = 1{,}866025404...$ il quadrato della proporzione presenta, a partire dalla seconda cifra decimale, la stessa mantissa della proporzione e la loro differenza è:
$1{,}866025404... - 1{,}366025404... = 0{,}5$

Costruzione geometrica dei rettangoli :



m1 = 1
M1 = 1,366025404...
m2 = 1,366025404...
M2 = 1 + 1,366025404... = 2,366025404...
1° rapporto M1/m1 = 1,366025404... / 1 = 1,366025404...
2° rapporto M2/m2 = 2,366025404... / 1,366025404... = √3
Dato che (M1/m1) ≠ (M2/m2) ossia 1,366025404.. ≠ √3
la proporzione iniziale tra i lati M1 ed m1 del primo rettangolo non permane nel rapporto tra i lati M2 ed m2 del secondo rettangolo, a differenza di quanto accade dimensionando i rettangoli secondo il rapporto aureo.
2° ESEMPIO: sostituzione della √5 con la √6
La proporzione che risulta è
(√6 + 1) : 2 = 2,5 : (√6 - 1) = 1,724744871...
1,724744871...^2 = 2,974744871...
anche in questo caso il quadrato della proporzione presenta, a partire dalla terza cifra decimale, la stessa mantissa della proporzione e, pertanto, la loro differenza è un numero finito, infatti:
2,974744871... - 1,724744871... = 1,25

Costruzione geometrica dei rettangoli:
m1=1
M1= 1,724744871...
m2= 1,724744871...
M2= 1 + 1,724744871... = 2,724744871...
1° rapporto M1/m1= 1,724744871... / 1 = 1,724744871...
2° rapporto M2/m2= 2,724744871... / 1,724744871... = 1,579795897...
Dato che
(M1/m1) ≠ (M2/m2) ossia 1,724744871... ≠ 1,579795897...



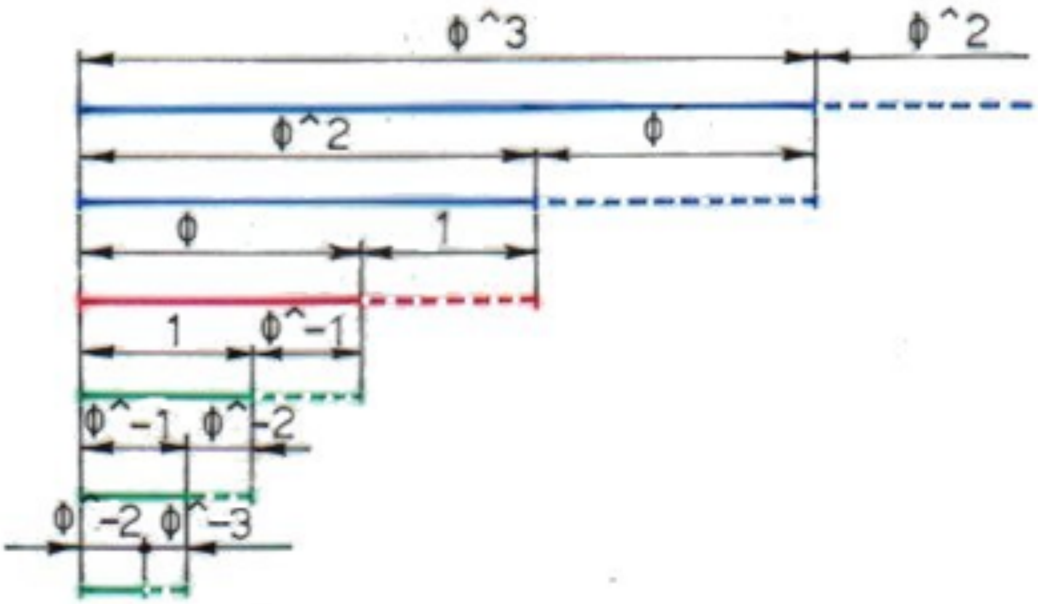
la proporzione iniziale tra i lati M1 ed m1 del primo rettangolo non permane nel rapporto tra i lati M2 ed m2 del secondo rettangolo, a

differenza di quanto accade dimensionando i rettangoli secondo il rapporto aureo.
A questo punto potremmo continuare a sostituire all'infinito la $\sqrt{5}$, però, questa via, oltre ad essere difficilmente percorribile, risulterebbe anche poco gratificante perché non troveremmo più altre proporzioni che sappiano infondere negli enti geometrici cui si applicano caratteristiche uniche come quelle derivanti dall'applicazione, su tali enti, del rapporto aureo 1,618033989...
Nel prossimo capitolo vedremo quindi su quale criterio matematico si fondi l'unicità della proporzione aurea rispetto a tutte le altre possibili proporzioni.

Capitolo Quarto - La Proporzione Aurea

Nel capitolo 2, dopo aver individuato la fondamentale caratteristica del rapporto aureo, siamo arrivati a rappresentare la proporzione
$\phi = (\sqrt{5} +1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1) = 1{,}618033989...$
come sequenza di rapporti fra potenze di ϕ , ebbene, ora estenderemo questo modo di rappresentare la proporzione aurea anche alle proporzioni utilizzate come esempi nel capitolo 3 per vedere se, da questo tipo di impostazione, emerga quella "qualità" che rende diversa la proporzione aurea rispetto a tutte le altre possibili proporzioni.
Partendo quindi dalla proporzione caratterizzata dalla $\sqrt{2}$ abbiamo che:
$(\sqrt{2} + 1) : 2 = 0{,}5 : (\sqrt{2} - 1) = 1{,}207106781...$
la sequenza di rapporti tra potenze di tale proporzione si presenta come:
$... = (1{,}207106781...^3 \ / \ 1{,}207106781...^2) = (1{,}207106781...^2 \ / \ 1{,}207106781...) =$
$= (1{,}207106781... \ / \ 1) = (1 \ / \ 1{,}207106781...^{-1}) = (1{,}207106781...^{-1} \ / \ 1{,}207106781...^{-2}) = ... = 1{,}207106781... \ / \ 1$
e la differenza fra il quadrato della proporzione e la proporzione è:
$1{,}457106781... - 1{,}207106781... = 0{,}25$, ossia
$x^2 - x = 0{,}25$
Come si vede la differenza 0,25 non fa parte della successione di rapporti tra potenze istituite dalla proporzione $(\sqrt{2} + 1) : 2 = 0{,}5 : (\sqrt{2} - 1) = 1{,}207106781...$
Per la proporzione caratterizzata dalla $\sqrt{3}$ abbiamo che:
$(\sqrt{3} + 1) : 2 = 1 : (\sqrt{3} - 1) = 1{,}366025404...$
la successione di rapporti tra potenze di tale proporzione si presenta come:

... = (1,366025404...^3 / 1,366025404...^2) = (1,366025404...^2 / 1,366025404...) =
= (1,366025404... / 1) = (1 / 1,366025404...^-1) = (1,366025404...^-1 / 1,366025404...^-2) = ... = 1,366025404... / 1
e la differenza fra il quadrato della proporzione e la proporzione è:
1,866025404... - 1,366025404... = 0,5, ossia
x^2 - x = 0,5
Anche in questo caso la differenza 0,5 non fa parte della successione di rapporti tra potenze istituite dalla proporzione (√3 + 1) : 2 = 1 : (√3 - 1) = 1,366025404...
Per la proporzione aurea, caratterizzata dalla √5 , abbiamo che:
φ = (√5 + 1) : 2 = 2 : (√5 - 1) = 1,618033989...
la successione di rapporti tra potenze di sezione aurea si presenta come:
... = (1,618033989...^3 / 1,618033989...^2) = (1,618033989...^2 / 1,618033989...) =
= (1,618033989... / 1) = (1 / 1,618033989...^-1) = (1,618033989...^-1 / 1,618033989...^-2) = ... = 1,618033989... / 1
e la differenza fra il quadrato di sezione aurea e sezione aurea è:
2,618033989... - 1,618033989... = 1. ossia
φ^2 - φ = 1
Tale differenza, come si vede, non è estranea alla successione di potenze istituite dal rapporto aureo, il monomio 1 è parte integrante, è membro costitutivo della sequenza aurea come dimostra, del resto, anche la figura sotto riportata.



La possibilità di trarre le generali
$\phi n + \phi n+1 = \phi n+2$ e $\phi n+2 - \phi n+1 = \phi n$
si ha in virtù del fatto che il monomio 1 appartiene alla successione di potenze di sezione aurea. Questa caratteristica aritmetica della successione aurea si traduce, a sua volta, nella costruzione geometrica dei rettangoli proposta nei capitoli precedenti dove abbiamo visto che la proporzione aurea si rigenera all'infinito come rapporto tra i la M ed m di ogni nuovo rettangolo (vedi capitolo 2).
Successivamente riporto altri due significativi esempi di proporzioni nei quali sostituisco alla √5 prima la √4,99 poi la √5,01 per mostrare come, non appena ci si discosti dalla √5 , non sia più possibile avere una differenza fra quadrato della proporzione e proporzione che appartenga alla successione di potenze istituite dalla rispettiva proporzione.
1° ESEMPIO: per la proporzione caratterizzata dalla √4,99 abbiamo che:
(√4,99 + 1) : 2 = 1,995 : (√4,99 - 1) = 1,616915395...
la successione di rapporti tra potenze di tale proporzione si presenta come:
... = (1,616915395...^3 / 1,616915395...^2) = (1,616915395...^2 / 1,616915395...) =
= (1,616915395... / 1) = (1 / 1,616915395...^-1) = (1,616915395...^-1 / 1,616915395...^-2) = ... = 1,616915395... / 1
e la differenza fra il quadrato della proporzione e la proporzione è:
2,614415395... - 1,616915395... = 0,9975, ossia
$x^2 - x = 0,9975$
Tale differenza, come si vede, non è membro della successione di rapporti tra potenze istituite dalla proporzione (√4,99 + 1) : 2 = 1,995 : (√4,99 - 1) = 1,616915395...
2° ESEMPIO: per la proporzione caratterizzata dalla √5,01 abbiamo che:
(√5,01+1) : 2 = 2,005 : (√5,01-1) = 1,619151464...
la successione di rapporti tra potenze di questa proporzione si presenta come:
... = (1,619151464...^3 / 1,619151464...^2) = (1,619151464...^2 / 1,619151464...) =
= (1,619151464... / 1) = (1 / 1,619151464...^-1) = (1,619151464...^-1 / 1,619151464...^-2) = ... = 1,619151464... / 1

e la differenza fra il quadrato della proporzione e la proporzione è:
2,621651464... - 1,619151464... = 1,0025, ossia
$x^2 - x = 1,0025$
Anche in questo caso la differenza 1,0025 è numero estraneo alla successione di rapporti tra potenze istituite dalla proporzione
$(\sqrt{5,01} + 1) : 2 = 2,005 : (\sqrt{5,01} - 1) = 1,619151464...$
La sezione aurea è, pertanto, l'unica proporzione in cui la differenza fra quadrato della proporzione e proporzione (cioè il monomio 1) è già implicata nella successione di rapporti tra potenze della rispettiva proporzione; questa proprietà aritmetica rende unico e qualitativamente diverso il rapporto aureo rispetto a tutti gli altri possibili rapporti ed inoltre determina caratteristiche uniche negli enti geometrici cui il rapporto aureo si applica.
Padova, 05/10/2007.